Fler uppgifter från kap. 11

October 28, 2019

Uppgift 11.13

Man önskar ersätta funktionen $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$ med sitt McLaurinpolynom $p_4(x)$. Ange polynomet och uppskatta hur mycket $f(x)$ maximalt skiljer sig från $p_4(x)$ då $|x| \le \frac{1}{4}$.

Från boken känner vi till $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + x^5B(x)$. Därmed blir det $\ln(1-x^2) = -x^2 - \dfrac{1}{2}\left(-x^2\right)^2 + R_6(x)$. Dessutom vet vi att $p_5(x) = p_4(x)$, så vi kan skriva $p_5(x) = p_4(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x^4$ samt att $R_6(x) = \dfrac{x^6}{6!}\left(\ln(1-\zeta^2)\right)^{(6)}$, för något tal $0 \le \zeta \le x$. Största värdet som $R_6(x)$ kan tänkas ha då $|x| \le \frac{1}{4}$ är 0.00024. Det riktiga felet är åningen lägre än så, kring 0.0001.

Uppgift 11.18

Finn McLaurinutveckling av ordning 4 för $f(x) = e^{\cos x}$.

Vi analyserar sammansättningen $f(t) = e^t$ med $t = \cos x$. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^6B(x)$. Enklare än att använda en standardprocedur är att räkna $e^{\cos x} = e^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^6B(x)} = e \cdot e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^6B(x)}$. Vi utvecklar sista biten som: $e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^6B(x)} = 1 + \left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^6B(x)\right) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^6B(x)\right)^2 + x^6B_1(x)$. Det blir $e^{\cos x} = e - \dfrac{ex^2}{2} + \dfrac{ex^4}{6} + x^6B_1(x)$.

Uppgift 11.24a

Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Vi gör substitutionen $x = 1 + t$. Problemet skrivs om till $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1+t}{t} - \dfrac{1}{\ln(1+t)}\right) = \lim\limits_{t\to 0}\left(1 + \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\ln(1+t)}\right) = 1 + \lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)}\right)$. Vi har att $\dfrac{\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)} = \dfrac{t - \frac{t^2}{2} + t^3B(t) - t}{t\left(t - \frac{t^2}{2} + t^3B(t)\right.} \to -\dfrac{1}{2}$. Svar: $\dfrac{1}{2}$.

Uppgift 11.31a, 11.32a

Ange summan av serierna $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ samt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{k!}$.

Indexnamn spelar ingen större roll. Vi har att exponentialfunktionen uppfyller $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ som konvergerar för alla reella x. Speciellt blir det $e^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ och $e^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Uppgift 11.39

Bestäm McLaurinpolynom $p_2(x)$ av ordning två till $f(x) = \int_0^x \frac{t}{\cos t}\, dt$.

Vi behöver inte kunna lösa en primitiv av f. Vi behöver bara $f(0) = 0$, samt $f'(x), f''(x)$ vid $x = 0$. Analysens huvudsats ger att $f'(x) = \frac{x}{\cos x}$och vidare att $f''(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{x \sin x}{\cos^2 x}$. Vi får då $p_2(x) = \frac{x^2}{2}$.