

Fler uppgifter från kap. 6

October 28, 2019

Uppgift 6.52d

Dela upp $p(x) = x^4 + 1$ i reella faktorer av lägsta möjliga grad.

Först faktorerar vi polynomet bland de komplexa talen. $p(z) = 0$ har exakt fyra rötter, som uppfyller ekvationen $z^4 + 1 = 0$. Med hjälp av polärform kan ekvationen skrivas om till $z^4 = R^4 e^{i4\phi} = -1 = e^{i\pi}$. Alltså är R ett positivt tal vars 4:e potens är 1, dvs $R = 1$. Samtliga lösningar fås av de olika värden för $4\phi = \pi + 2k\pi$, dvs $\phi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, som ger skilda tal, nämligen $\phi = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$. Detta ger rötterna $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$, $z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$, $z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. Det komplexa polynomet kan faktoriseras med 4 st komplexa faktorer av grad 1, dvs

$$p(z) = (z - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i))(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i))(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i))$$

Frågan var dock att bestämma *reella* faktorer. Faktorerna kan grupperas två och två så att de är reella, eftersom $(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)) = z^2 - z\sqrt{2} + 1$ och $(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i))(z - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)) = z^2 + z\sqrt{2} + 1$. Därmed blir

$$p(x) = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1).$$

Uppgift 6.67

Det finns ett komplext tal som är rot både till andragradsekvationen $z^2 + (2-i)z + 3-i = 0$ och till tredje-gradsekvationen $2z^3 + 3z^2 + 2z - 2 = 0$. Lös båda ekvationerna.

Vi kallar det talet för $z_1 = a + bi$. Insättning i andragradsekvationen ger $(a+ib)^2 + (2-i)(a+ib) + 3-i = 0$, dvs $a^2 - b^2 + 2a + b + 3 + i(2ab - a + 2b - 1) = 0$ vilket kan skrivas om till $(a^2 - b^2 + 2a + b + 3) + i(2b - 1)(a + 1) = 0$. Antingen är $a = -1$ och i så fall $-b^2 + b + 2 = 0$, dvs $b = 2$ eller $b = -1$, eller också är $b = \frac{1}{2}$ och i så fall $a^2 + 2a + \frac{13}{4} = 0$, men den här ekvationen har inga reella lösningar. Alltså är $z_1 = -1 - i$ och $z_2 = -1 + 2i$ lösningarna till andragradsekvationen. En av dessa två är lösningen till tredje-gradsekvationen. Vi testar: $2(-1+2i)^3 + 3(-1+2i)^2 + 2(-1+2i) - 2 = 9 - 12i$ och $2(-1-i)^3 + 3(-1-i)^2 + 2(-1-i) - 2 = 0$, så z_1 är en rot av tredje-gradsekvationen. För att hitta de övriga rötterna noterar vi först att tredje-gradsekvationen har reella koefficienter, så $z_2 = -1 + i$ är också en rot. För att hitta den resterande roten gör vi polynomdivision: $2z^3 + 3z^2 + 2z - 2 = 2(z+1+i)(z+1-i)(z-\frac{1}{2})$. Det blir alltså $z_3 = \frac{1}{2}$.