

Totalt kan man få 120 poäng. För godkänt krävs 50 poäng.

Till Del A skall endast svar lämnas. Samtliga svar skall skrivas på det svarsblad som finns tillgängligt. Övriga uppgifter fordrar väl motiverade lösningar med svar. Varje lösning skall börja överst på nytt blad.

Institutionens papper skall användas både som kladdpapper och inskrivningspapper.

Rödpena får ej användas.

Skriv anonymkod och personlig identifierare på alla papper.

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare (utnyttjande av i förväg skrivna program och/eller textmassor är ej tillåtet), Formelsamling i Matematisk statistik för V och L, samt TEFYMA eller MaFyKe, eller likvärdig gymnasiatabell.

Resultatet läggs in i Ladok senast måndag 3 februari 2020.

DEL A: ENDAST SVAR SOM ANGES PÅ SVARSBLAD

1. (a) Enligt en debattartikel i Dagens Nyheter 24/11-19, kan 96 % av alla läkemedel expedieras direkt. De som inte kan expedieras blir restnoterade. En patient kommer till apoteket med recept på 10 olika läkemedel. Beräkna sannolikheten att alla 10 kan expedieras. Svara med tre decimaler. Antag lämpliga oberoenden. (4p)
- (b) (*Forts. på 1a*) Patienten behöver hämta ut alla sina 10 läkemedel fyra gånger om året. Beräkna sannolikheten att hen varje gång har oturen att få minst ett läkemedel restnoterat. Svara med tre decimaler. Antag lämpliga oberoenden. (4p)
- (c) Antag att tiden det tar innan ett restnoterat läkemedel finns tillgängligt igen är exponentialfördelat med väntevärde 2 månader. Antag också att olika läkemedel blir tillgängliga oberoende av varandra. En patient har fått två läkemedel restnoterade. Beräkna sannolikheten att det dröjer mer än 3 månader innan båda läkemedlen blivit tillgängliga igen. Svara med tre decimaler. (4p)
- (d) Medellufttrycket under en slumpmässigt vald junidag i Lund kan anses vara normalfördelat med väntevärde 1015 hPa och standardavvikelse 7 hPa¹. Beräkna sannolikheten att medellufttrycket en slumpmässigt vald junidag i Lund överstiger 1029 hPa. Svara med tre decimaler. (4p)
- (e) Medellufttrycket under en slumpmässigt vald månad är antingen Lågt (<1010 hPa), Måttligt (1010–1020 hPa) eller Högt (>1020 hPa), med sannolikheter 0.20, 0.72 respektive 0.08. Sannolikheten att det regnar sammanlagt minst 50 mm under en månad varierar med medellufttrycket. Om lufttrycket var Lågt är sannolikheten att det regnar mer än 50 mm 0.90, om trycket var Måttligt är sannolikheten 0.47 och om trycket var Högt är den 0.06. Beräkna sannolikheten att det regnar mer än 50 mm under en slumpmässigt vald månad. Svara med tre decimaler. (4p)
- (f) Under andra halvan av 1980-talet avläste man vädret klockan 06.00 på morgonen och klockan 18.00 på kvällen. Sannolikheten att det är dimma en slumpmässigt vald morgon är 0.19. Sannolikheten att det är dimma en slumpmässigt vald kväll är 0.14. Sannolikheten att det är dimma både morgon och kväll en slumpmässigt vald dag är 0.09. Beräkna den betingade (4p)

¹Alla väderrelaterade data i denna tenta är hämtade från www.smhi.se/data/meteorologi. Mätstationen är Lund 53430 på Gastelyckan om inget annat anges.

sannolikheten att det är dimma på kvällen, givet att det var dimma på morgonen. Svara med tre decimaler.

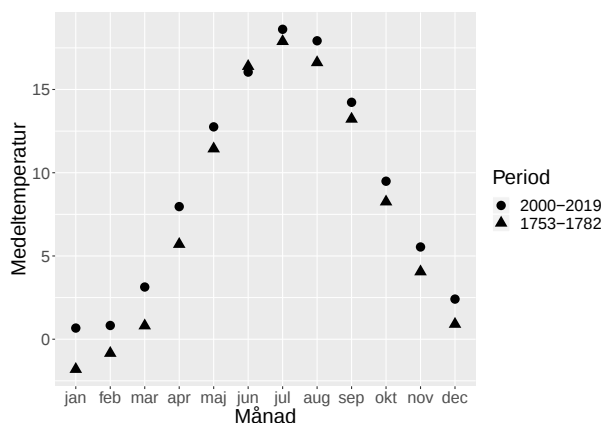
- (g) Totala mängden nederbörd (mm) under en slumpmässigt vald månad i Lund (i perioden mars 1748 – december 1989) kan beskrivas med en slumpvariabel med väntevärde $\mu = 47.3$ mm och standardavvikelse $\sigma = 29.0$ mm. Antag att nederbördsmängden olika månader är oberoende av varandra och beräkna, approximativt, sannolikheten att totala mängden nederbörd under ett år (12 månader) ligger mellan 400 och 700 mm. Svara med tre decimaler. (4p)
- (h) I själva verket kan totala mängden nederbörd under en månad beskrivas med en Weibull-fördelning med fördelningsfunktion $F(x) = 1 - e^{-(x/a)^c}$ där $a = 53.0$ mm och $c = 1.7$. Beräkna sannolikheten att det regnar mer än 100 mm under en månad. Svara med tre decimaler. (4p)
- (i) (Forts. på 1h) Beräkna 1 %-kvantilen $x_{0.01}$ för totala mängden nederbörd under en månad. Svara med en decimal. (4p)
- (j) Antalet månader med mer än 150 mm regn under en 30-årsperiod kan approximeras med en Poissonfördelning. Väntevärdet har varit $\lambda = 1.2$ per 30 år men man kan misstänka att det nu har ökat. Under de senaste 30 åren (1990–2019) inträffade det hela 5 gånger. Beräkna testets p-värde och ange om ökningen är signifikant på nivån $\alpha = 5\%$. Svara med tre decimaler samt ”ja” eller ”nej”, (4p)

DEL B: FULLSTÄNDIGA LÖSNINGAR

T.ex. ska införda beteckningar noga redovisas, modeller alltid anges och approximationer, hypoteser och slutsatser anges och motiveras

2. Totala mängden nederbörd per år under perioden 1748–1989 kan beskrivas av en stokastisk variabel med känt väntevärde $\mu_0 = 568$ mm och känd standardavvikelse $\sigma = 106$ mm. Man vill undersöka om medelnederbördsmängden har ökat. Antag att nederbördsmängden per år, ξ , numera har väntevärde μ , men samma standardavvikelse, σ , som tidigare. Antag också att olika år är oberoende av varandra. Man mäter nederbördsmängden under vart och ett av de senaste $n = 30$ åren, 1990–2019, får observationerna $x_1, \dots, x_{30}$ och skattar väntevärdet med medelvärde $\mu_{\text{obs}}^* = \bar{x}$.
- (a) Ange approximativa fördelningen för skattningen $\mu^* = \bar{\xi}$. Motivera approximationen. (5p)
- (b) Man vill testa om nederbördsmängden har ökat, dvs $H_0: \mu = 568$ mot $H_1: \mu > 568$, med ett test på formen ”Förkasta H_0 om $\bar{x} > k$ ” på signifikansnivån $\alpha = 5\%$. Bestäm den kritiska gränsen k . (5p)
- (c) Beräkna styrkan hos testet i 2b om nederbördsmängden har ökat till $\mu = 655$ mm. (5p)
- (d) Hur stor måste nederbördsmängden μ vara för att styrkan hos testet i 2b ska vara minst 90 %? (5p)
3. Månadsmedelvärdet av lufttemperaturen i Lund har observerats sedan 1753. Vi är intresserade av den, eventuella, systematiska förändringen i månadsmedeltemperatur från mitten av 1700-talet jämfört med nu. En vänlig människa har beräknat medelvärdena för de 20 första respektive de 20 sista januarimånaderna, etc:

månad	jan	feb	mar	apr	maj	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
1753–1782	−1.8	−0.8	0.8	5.7	11.4	16.4	17.9	16.6	13.2	8.3	4.1	0.9
2000–2019	0.7	0.8	3.1	8.0	12.8	16.0	18.6	17.9	14.2	9.5	5.5	2.4
förändring	2.5	1.6	2.3	2.3	1.4	−0.4	0.7	1.3	1.0	1.2	1.4	1.5



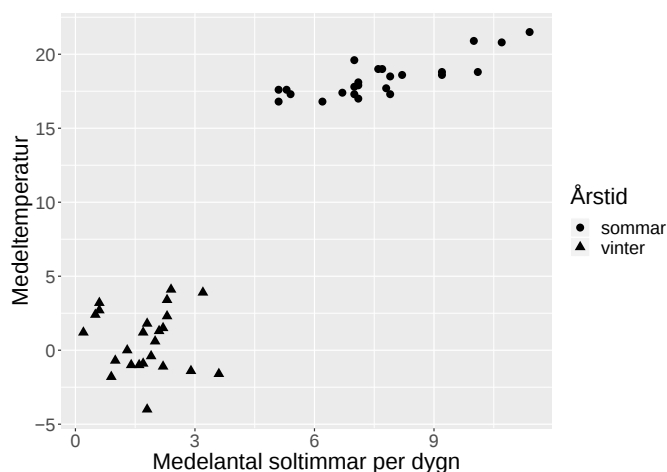
Den vänliga människan har också beräknat medelvärdena och standardavvikelserna för de tre stickproven:

	n	$\bar{x}$	s
1753–1782	12	7.25	7.24
2000–2019	12	9.12	6.67
förändring	12	1.40	0.79

- (a) Ställ upp en lämplig modell, baserad på normalfördelning(ar), och beräkna ett tvåsidigt 95 % konfidensintervall för den systematiska genomsnittliga temperaturförändringen. (15p)
- (b) Testa, på signifikansnivån 5 %, om det finns en signifikant systematisk temperaturförändring. (5p)
4. Man vill studera sambandet temperaturen och hur mycket solen skiner (dvs inte är skyddad av moln) på sommaren och har beräknat dygnsmedeltemperatur och medelantal soltimmar per dygn under juli och augusti under perioden 2008–2019². Motsvarande data för vintermånaderna januari och februari redovisas inte men ses i figuren.

x_i sol (h)	10.1	7.7	10.0	5.1	7.0	9.2	10.7	7.9	7.1	6.2	11.4	8.2
y_i temp (°C)	18.8	19.0	20.9	17.6	17.8	18.8	20.8	17.3	18.1	16.8	21.5	18.6

x_i sol (h)	5.4	7.9	5.3	5.1	7.1	7.8	7.1	9.2	7.0	6.7	7.0	7.6
y_i temp (°C)	17.3	18.5	17.6	16.8	17.9	17.7	17.0	18.6	17.3	17.4	19.6	19.0



Räknehjälp: sommardata

$$n = 24$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 183.8$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 440.7$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 68.92$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 38.34$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 41.77$$

Antag att sommartemperaturen beror linjärt på antalet soltimmar, bortsett från oberoende och normalfördelade slumpvariationer.

- (a) Gör ett 95 % konfidensintervall för den förväntade temperaturökningen på sommaren när antalet soltimmar ökar med 1 timme. (6p)
- (b) Gör ett 95 % konfidensintervall för den förväntade dygnsmedeltemperaturen, enligt modellen, en månad sommar med, i genomsnitt, 2 soltimmar per dygn. (6p)
- (c) Man kan misstänka att förhållandet mellan temperatur och soltimmar ser annorlunda ut på (5p)

²Soltimmarna är hämtade från mätstation Lund Sol 53445.

vintern och anpassar därför modellen

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \varepsilon_i \text{ där } \varepsilon_i \in N(0, \sigma)$$

där x_1 = soltimmar, $x_2 = 0$ om sommaren och $= 1$ om vintern, samt $x_3 = x_1 \cdot x_2$. Resultat:

Paramater	Skattning	95 % konf.int.
β_0	13.7	(10.6, 16.8)
β_1	0.6	(0.2, 1.0)
β_2	-12.9	(-16.3, -9.4)
β_3	-0.7	(-1.6, 0.2)

Vilka signifikanta skillnader finns mellan sommar och vinter?

- (d) (*Forts. på 4c*) Använd den skattade modellen för att beräkna den förväntade medeltemperaturen en mulen vintermånad som i genomsnitt har 2 soltimmar per dygn. (3p)
5. Enligt miljökvalitetsnormen skall antalet dagar på ett år som MD8h överstiger $120 \mu\text{g}/\text{m}^3$ vara 0. MD8h definieras som maximum av det glidande 8-timmarsmedelvärdet av den marknära ozonhalten. Vid mätstationen vid Spyken i Lund noterade man varje år under perioden 2000–2018 hur många dagar som MD8h översteg $120 \mu\text{g}/\text{m}^3$. Resultat:³:

Antal dagar då MD8h > $120 \mu\text{g}/\text{m}^3$	0	1	2	3	4	5	6	7	summa
Antal år	10	4	2	0	2	0	0	1	19

- (a) Uppskatta sannolikheten att man uppfyller miljökvalitetsnormen ett slumpmässigt valt år. (3p)
- (b) Beräkna väntevärde och standardavvikelse för antalet dagar per år som MD8h-värdet överstiger $120 \mu\text{g}/\text{m}^3$. (5p)
- (c) Använd uppskattningen i 5a för att beräkna sannolikheten att man uppfyller miljökvalitetsnormen precis 2 av de kommande 5 åren. Du får anta att olika år är oberoende av varandra. (5p)
- (d) Under perioden 1990–1999, ökade det marknära ozonet och som värst låg MD8h över $120 \mu\text{g}/\text{m}^3$ i 42 dagar under ett år (1999). Man undrar hur många år det dröjer, med nuvarande ozonhalter, innan man sammanlagt fått ihop så många dagar, dvs hur stort n behöver vara för att $\sum_{i=1}^n \xi_i \geq 42$. Beräkna, med hjälp av en lämplig approximation, hur många år med nuvarande ozonhalter som krävs för att man, med sannolikhet minst 90 %, ska komma upp i sammanlagt minst 42 dagar. (7p)

Lycka till!

³Källa SMHI: <https://shair.smhi.se/portal/yearly-statistics?S=8963&P=7>