

Korrekt, väl motiverad lösning på uppgift 1–3 ger 10 poäng vardera medan uppgift 4–6 ger 20 poäng vardera. Totalt kan man få 90 poäng. Gränsen för godkänd är 40 poäng.

Institutionens papper används både som kladdpapper och inskrivningspapper. Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Rödpenna får ej användas.

Tillåtna hjälpmedel: Matematiska och statistiska tabeller som ej innehåller statistiska formler, formelsamling matematisk statistik för FMS012/FMSF20/FMSF45, samt miniräknare.

Resultatet förs in i LADOK senast torsdag den 6 februari.

**Redovisa införda beteckningar; ange modeller, approximationer, hypoteser och slutsatser.
Motivera alla antagande.**

Skriv anonymkoden (eller namn) på omslaget och SAMTLIGA inlämnade papper.

1. Till välkomstdrinken vid årets stora nyårsfest äter gästerna blandade snittar. 10% av gästerna äter 1 bit, 30% äter 2 bitar och 40% äter tre bitar, medan resterande gäster klarar sig utan snittar (Champagnen vad väldigt god). Antalet snittar som konsumeras av olika gäster kan antas vara oberoende.
 - (a) Beräkna väntevärde och varians för antalet snittar som en godtycklig gäst äter. (5p)
 - (b) Hur många snittar borde köket tillaga för att det, med 99% sannolikhet, ska räcka till de 100 gästerna? (5p)
2. Det tar Emma en exponentialfördelad tid, X , med väntevärde 10 minuter att cykla från sin lägenhet till stationen. Därefter tar det henne en rektangelfördelad tid, Y , på mellan 0 och 2 minuter att hitta en plats till cykeln. De två tiderna kan anses vara oberoende av varandra.
 - (a) Skriv upp den bivariata täthetsfunktionen, $f_{X,Y}(x,y)$, och skissera det område där funktionen är större än 0. (2p)
 - (b) Beräkna täthetsfunktionen för Emmas totala restid till stationen, $T = X + Y$. (4p)
 - (c) En morgon lämnar Emma sin lägenhet 10 minuter innan tåget går. Vad är sannolikheten att hon hinner i tid? (4p)
3. Enligt legenden kan drakar avgöra om föremål är av guld genom att smaka på dem. För att undersöka om legenden är sann presenterar Bilbo 16 blandade föremål, en del äkta och en del förfälskade, för draken Smaug. Smaug har rätt om 13 av föremålen. Ansett en lämplig modell och testa på signifikansnivån 5% om Smaug bara gissar (dvs borde ha ungefär hälften rätt) eller om det finns någon sanning i legenden (dvs Smaug har **fler** rätt). (10p)
4. Gäster anländer till nyårsfesten enligt en Poissonprocess, $X(t)$, med intensitet 2 gäster per minut.
 - (a) Samuel välkomnar gästerna. Vad är sannolikheten att han får vänta mer än 1 minut mellan två gäster? (5p)
 - (b) Vad är sannolikheten att minst 15 gäster har anlänt efter 5 minuter? (5p)
 - (c) Gästerna börjar anlända 15 minuter innan festen börjar och 25 minuter senare har all 50 gästerna anlänt. Beräkna den betingade sannolikheten att k st av gäster anländer i tid, dvs beräkna $P(X(15) = k \mid X(25) = 50)$. (8p)
 - (d) Svaret i uppgift 4c följer en standardfördelning, vilken? (2p)

5. För att undersöka vad som påverkar priset på lägenheter i Lund har försäljningspriset på 516 lägenheter analyserats med hjälp av linjär regression. Priset, y , i tusentals kronor har satts i förhållande till lägenhetens storlek, $x^{(1)}$, i kvadratmeter, och avståndet till järnvägsstationen, $x^{(2)}$, i kilometer. Två olika modeller (med eller utan avstånd till stationen) testades och resultaten sammanfattas av tabellen nedan:

	Modell 1:	Modell 2:
	$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^{(1)} + \varepsilon_i$	$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^{(1)} + \beta_2 x_i^{(2)} + \varepsilon_i$
β^*	$\begin{bmatrix} 76.9 \\ 37.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 161.9 \\ 37.7 \\ -34.1 \end{bmatrix}$
$(X^T X)^{-1}$	$\begin{bmatrix} 1.51 \cdot 10^{-2} & -1.46 \cdot 10^{-4} \\ -1.46 \cdot 10^{-4} & 1.61 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.09 \cdot 10^{-2} & -1.42 \cdot 10^{-4} & -2.31 \cdot 10^{-3} \\ -1.42 \cdot 10^{-4} & 1.61 \cdot 10^{-6} & -1.64 \cdot 10^{-6} \\ -2.31 \cdot 10^{-3} & -1.64 \cdot 10^{-6} & 9.26 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$
Q_0	$4.4885 \cdot 10^7$	$4.3632 \cdot 10^7$

- (a) Ge en tolkning av β -koefficienterna i Modell 2. (4p)
- (b) Konstruera 95%-iga konfidensintervall för β_1 och β_2 i Modell 2. Tolka intervallen i förhållande till medelprisökningen per kvadratmeter i Skåne som är 26 756 kr/kvm och i termer av effekten av avstånd till järnvägsstationen. (6p)
- (c) En mäklare ska lägga ut en lägenhet på 67 kvm som ligger 2.5 km från stationen till försäljning. Använd en lämplig modell för att ta fram ett riktpreis till försäljningen. (4p)
- (d) Mäklaren tycker att lägenheten är ovanligt fin och väljer ett utgångspris på 2 980 tusen kronor. Jämför priset med den övre gränsen i ett lämpligt intervall för att få en uppfattning om hur ovanlig mäklaren tycker att lägenheten är (dvs, är det en top 1%, 5%, 10% eller % lägenhet). (6p)
6. En lämplig modell för hållbarheten av glass är att den kraft som krävs för att ha sönder glasets fördelad med täthets- och fördelningsfunktion:

$$f_X(x) = \frac{k x^{k-1}}{\lambda^k} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right), \quad x \geq 0, \quad F_X(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right), \quad x \geq 0.$$

För glass är $k = 10$ ett lämpligt värde och λ skattas från ett stort antal belastningsprov (värdet beror på glasets storlek och framställning).

- (a) Givet observationer från 125 belastningsprover på identiska glasskivor skattades $\lambda^* = 75$ MPa. David vill nu använda liknande glasskivor i en konstruktion. Bestäm den last som 99.9% av alla liknande skivor kan förväntas klara. (6p)
- (b) Värdet på λ i 6a baseras på en ML-skattningen. Härled ML-skattningen av λ i en Weibullfördelning med känt värde på k .
Tips: För att underlätta räkningarna kan variabelbytet $b = \lambda^k$ var lämpligt. (7p)
- (c) Weibullfördelningen är vanligt förekommande i extremvärdesanalys och dess användning för glas baseras på ett "svagaste länken" argument. Fördelningen är min-stabil, dvs att minimum av flera oberoende Weibullfördelade stokastiska variabler också följer en Weibullfördelning. Visa att fördelningen är min-stabil genom att beräkna tätheten för minimum av n st likafördelade och oberoende Weibullfördelade stokastiska variabler. Dvs, beräkna $f_Y(y)$ där

$$Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{och} \quad X_i \in \text{Weibull}(\lambda, k)$$

Tips: Sambandet $ab^k = (a^{1/k}b)^k$ kan vara användbart. (7p)